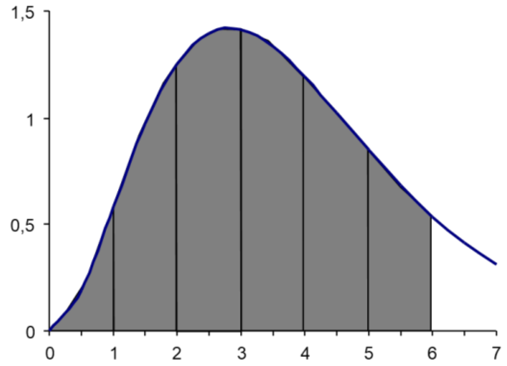
Численное интегрирование

Задача численного интегрирования сводится к нахождению численного значения $I = \int_a^b f(x)dx$.



Численное интегрирование основано на аппроксимации подынтегральной функции другой функцией, для которой существует аналитическое решение определенного интеграла.

Аппроксимация – замена одних математических объектов другими в том или ином смысле близкими к исходным.

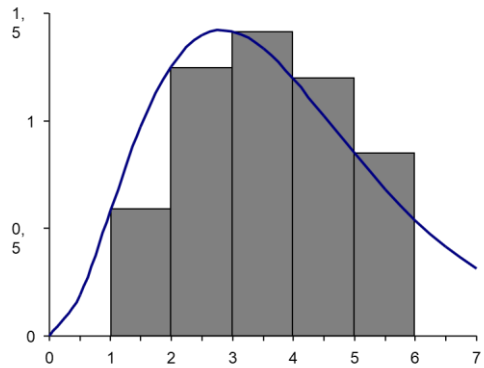
Метод прямоугольников

Численное интегрирование методом прямоугольников имеет три разновидности: метод левых прямоугольников, метод *правых прямоугольников* и метод *центральных прямоугольников*.

Метод левых прямоугольников

При вычислении интеграла методом *левых прямоугольников* *криволинейная трапеция* заменяется *прямоугольниками*, высоты которых равны значению функции в *левых точках интервалов*.

Основания всех прямоугольников равны $h = \frac{b-a}{n}$.

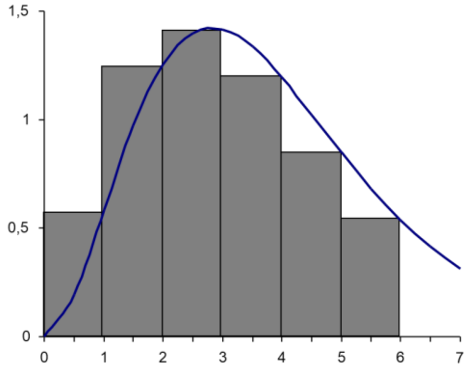


Формула вычисления интеграла методом левых прямоугольников $I_{ЛП} = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i \cdot h)$.

Метод правых прямоугольников

При вычислении интеграла методом *правых прямоугольников криволинейная трапеция* заменяется *прямоугольниками*, высоты которых равны значению функции в *правых точках интервалов*.

Основания всех прямоугольников равны $h = \frac{b-a}{n}$.

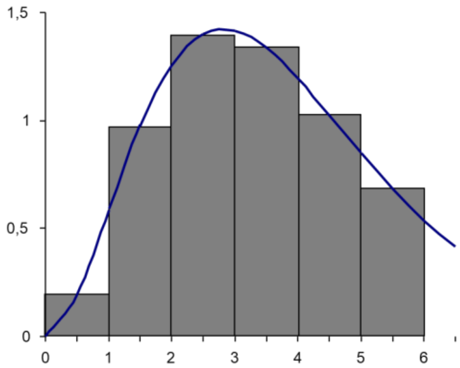


Формула вычисления интеграла методом правых прямоугольников $I_{ПП} = h \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i \cdot h\right)$.

Метод центральных прямоугольников

При вычислении интеграла методом *центральных прямоугольников криволинейная трапеция* заменяется *прямоугольниками*, высоты которых равны значению функции в *центрах интервалов*.

Основания всех прямоугольников равны $h = \frac{b-a}{n}$.

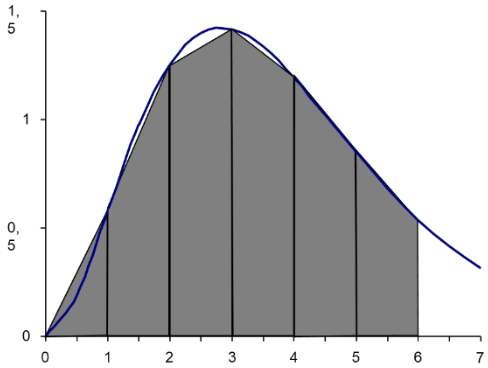


Формула вычисления интеграла методом центральных прямоугольников $I_{ЦП} = h \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{(2i-1) \cdot h}{2}\right)$.

Метод трапеций

При вычислении интеграла методом *трапеций криволинейная трапеция* заменяется *линейной функцией* на каждом элементарном отрезке.

Высоты всех трапеций равны $h = \frac{b-a}{n}$.

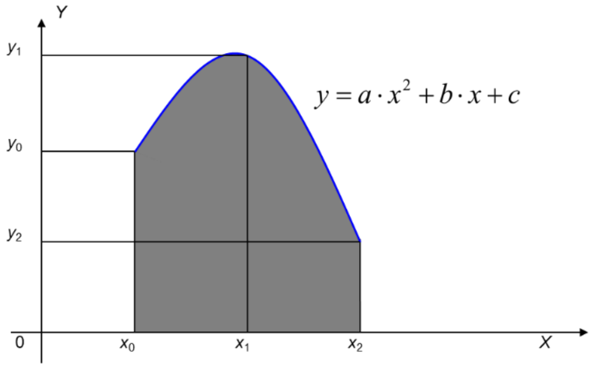


Формула вычисления интеграла методом трапеций $I_{Tp} = \frac{h}{2} \cdot \left[f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(a + i \cdot h) \right]$.

Метод парабол (Симпсона или Ньютона-Симпсона)

При вычислении интеграла методом *парабол криволинейная трапеция* заменяется *квадратичной функцией* $y = ax^2 + bx + c$ на каждом элементарном отрезке

$$I = \int_{X_0}^{X_2} f(x)dx \approx \int_{X_0}^{X_2} (a \cdot x^2 + b \cdot x + c)dx.$$



Формула вычисления интеграла методом парабол $I_П = \frac{h}{3} \cdot \sum_{i=0}^{n-2} (y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2})$, $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ (n кратно 2).

Метод Симпсона 3/8

При вычислении интеграла методом *Симпсона 3/8 криволинейная трапеция* на каждом элементарном отрезке заменяется *полиномом третьей степени* $y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

$$I = \int_{X_0}^{X_2} f(x)dx \approx \int_{X_0}^{X_2} (a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d)dx.$$

Формула вычисления интеграла методом Симпсона 3/8 $I_П = \frac{3h}{8} \cdot \sum_{i=0}^{n-3} (y_i + 3y_{i+1} + 3y_{i+2} + y_{i+3})$, $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ (n кратно 3).

Метод Гаусса

Квадратурная формула Гаусса

$$I=\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i),$$

$$x_i=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}\xi_i,$$

где ξ_i – относительные координаты узлов, корни полиномов Лежандра $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]$;

w_i – весовые коэффициенты.

Значения узлов метода Гаусса по n точкам являются корнями полинома Лежандра степени n. Значения весов вычисляются по формуле $a_i=\frac{2}{\left(1-x_i^2\right)\left[P_n'(x_i)\right]^2}$, где P_n' – первая производная полинома Лежандра.

Число точек	Порядок интегрирования	ξ	w	Дополнительно
3	5	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$	Метод Гаусса-3
		0	$\frac{8}{9}$	
		$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$	
4	7	$-\sqrt{\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$	Метод Гаусса-4
		$\sqrt{\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$	
		$-\sqrt{\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$	
		$\sqrt{\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$	

Сравнение различных методов по точности приближения

$$I=\int_a^b f(x)dx=Q(f)+E(f),$$

где $Q(f)$ – численное значение интеграла, полученное тем или иным методом, $E(f)$ – ошибка интегрирования, которая зависит от вида функции $f(x)$ и шага h.